

Quatrièmes : TRIANGLES – MILIEUX - PARALLELES

I. THEOREMES DES MILIEUX

1/ ACTIVITE PREPARATOIRE

Construire un triangle ABC et noter I et J les milieux respectifs de [AB] et [AC].

Que peut-on dire des droites (IJ) et (BC) ? Estimer le rapport $\frac{IJ}{BC}$.

2/ DEUX PREMIERS THEOREMES DES MILIEUX

Théorème 1 :

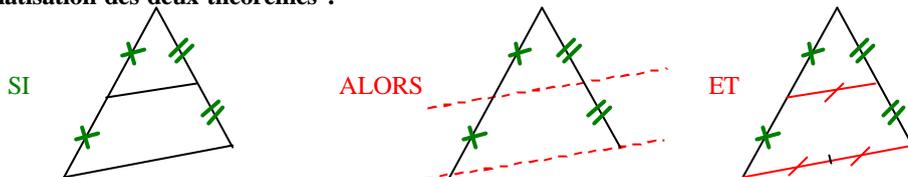
SI dans un triangle une droite passe par les milieux de deux côtés, **ALORS** cette droite (appelée droite milieu) est **parallèle** au troisième côté de ce triangle.

Commentaire : Les couleurs évitent les confusions entre hypothèses et conclusions...

Théorème 2 :

SI dans un triangle un segment passe par les milieux de deux côtés, **ALORS** sa longueur est **égale à la moitié** de celle du troisième côté de ce triangle.

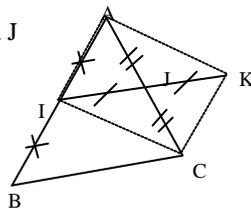
Schématisation des deux théorèmes :



Démonstration :

Hypothèses : ABC triangle, I milieu de [AB] et J milieu de [AC].
On note K le symétrique de I par rapport à J.

AKCI est un parallélogramme car ses diagonales se coupent en leur milieu J
On en déduit que (KC) // (IA) soit que (KC) // (BI) et que KC = IA.
Mais comme I est le milieu de [AB] on a aussi KC = BI
Donc BIKC est un parallélogramme et comme J est le milieu de IK on a :



Conclusion : (IK) // (BC) soit (IJ) // (BC) (théorème 1)
IJ = 1/2 JK = 1/2 BC (théorème 2).

3/ LE TROISIEME THEOREME DES MILIEUX

Théorème 3 :

SI dans un triangle une droite passe par le milieu d'un côté et est **parallèle** au second, **ALORS** cette droite coupe le troisième côté en son **milieu**.

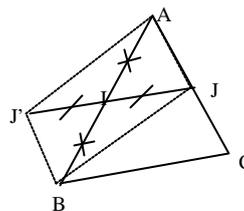
Schématisation du troisième théorème :



Démonstration :

Hypothèses : ABC triangle, I milieu de [AB]. (D) parallèle à (BC) coupe [AC] en J.
On note J' le symétrique de J par rapport à I.

Les droites (J'I) et (AB) ont même milieu I donc AJBJ' est un parallélogramme et $AJ = J'B$.
On en déduit aussi que $(J'B) // (AJ)$ donc que $(J'B) // (JC)$.
Mais comme J et J' appartiennent à (D) on a aussi $(JJ') // (BC)$ et donc le quadrilatère JCBJ' est un parallélogramme (ses côtés opposés sont parallèles deux à deux).
On a donc $JC = J'B$
Des deux égalités établies on tire $AJ = JC$.



Conclusion : J est le milieu de [AC].

Remarque :

Si les conditions de ce troisième théorème sont remplies, une fois que l'on a démontré la présence du deuxième milieu, les hypothèses du deuxième théorème des milieux sont vérifiées.

II. DROITE PARALLELE DANS UN TRIANGLE

1/ ACTIVITE PREPARATOIRE

Expérimentations où les élèves constatent l'égalité des rapports.

2/ (PETITE) PROPRIETE DE THALES (ADMISE).

Propriété de Thalès :

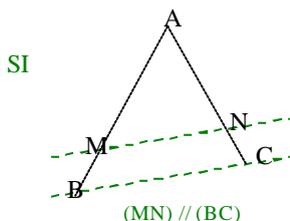
SI dans un triangle une droite passe par **deux points des côtés** et si elle est **parallèle** au troisième côté, **ALORS** elle forme un triangle dont les **longueurs des côtés sont proportionnelles** à celles du triangle initial.

Autrement dit :

SI dans un triangle ABC, M appartient à [AB], N à [AC] et (MN) est parallèle à (BC)

ALORS $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$ (ou $\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN} = \frac{BC}{MN}$)

Schématisation de la propriété de Thalès :



ALORS les côtés du triangle AMN sont **proportionnels** à ceux du triangle ABC, c'est-à-dire que :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$